# Chapitre 4
# Séries Numériques Et SériesEntières

# Content

- Définitions et convergence.
- Les Séries géométriques.
- Test De Divergence.
- Tests De Convergence pour les séries positive.
- Séries Altérnées
- Convergence Absolue

# Definitions and Convergence

On se donne une suite $(a_n)$, une expression de la forme

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

est une série infinie. Le terme $a_n$ est dit terme général de la série.

La suite $(s_n)$ définie par:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

est une suite des sommes partielles. Le terme $s_n$ est la $n^{\text{ième}}$ somme partielle.

Si la suite des sommes partielles converge vers limite $L$, on dit que la série converge vers $L$ et on écrit:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L.$$

Si La série ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

**Exemple** Étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$

Le terme général est $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

La suite des sommes partielles est:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \quad a_1 = 1 - \tfrac{1}{2} \\
s_2 &= \quad a_1 + a_2 = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) \\
s_3 &= \quad a_1 + a_2 + a_3 = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) \\
&\vdots \\
s_n &= \quad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \tfrac{1}{n+1}\right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Mais $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ La série est donc convergente.

# Séries Géométrique

Une série géométrique est de la forme

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Elle peut s'écrire aussi $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$.

Si $r = 1$, la $n^{\text{ième}}$ somme partielle devient

$$s_n = a + a(1) + a(1)^2 + \cdots + a(1)^{n-1} = na,$$

et la série diverge car: $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$

Si $r \neq 1$ la $n^{\text{ième}}$ somme partielle devient

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r},$$

Si $|r| < 1$, $r^n \to 0$ si $n \to \infty$ donc $s_n \to a/(1 - r)$

Si $|r| > 1$, on a $|r^n| \to \infty$ et la série diverge.

Si $|r| < 1$, la série géométrique $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ converge vers $a/(1-r)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \qquad |r| < 1.$$

Si $|r| \geq 1$, la série diverge.

Exemple

La série géométrique avec $a = 1/9$ et $r = 1/3$ est

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1/9}{1-(1/3)} = \frac{1}{6}.$$

# Test De Divergence

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge alors $a_n \to 0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si $\lim_{n\to\infty} a_n$ n'exite pas ou si elle est non nulle.

si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, Pas de conclusion.

## Exemple

**(a)** $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ diverge car $n^2 \to \infty$.

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

**(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ diverge car $\frac{n+1}{n} \to 1$.

**(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ diverge car $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ n'exsite pas.

# Tests De Convergence

Dans cette partie, toutes les séries sont à termes positifs

- Test de comparaison:

Soit $\sum a_n, \ \sum c_n$ et $\sum d_n$ sont telles que

$$d_n \le a_n \le c_n \qquad \text{pour tout } n > N$$

$(a)$ Si $\sum c_n$ converge alors $\sum a_n$ converge

$(b)$ Si $\sum d_n$ diverge alors $\sum a_n$ diverge

## Exemple

$$5 + \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + 1 + \frac{1}{2 + \sqrt{1}} + \frac{1}{4 + \sqrt{2}} + \frac{1}{8 + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2^n + \sqrt{n}} + \cdots$$

On ignore les trois premiers termes mais le reste peut être comparé à la somme:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1/2^n).$$

On a:

$$1 + \frac{1}{2 + \sqrt{1}} + \frac{1}{4 + \sqrt{2}} + \frac{1}{8 + \sqrt{3}} + \cdots \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

Comme $\sum \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente ( $q = \frac{1}{2} < 1$),

alors par comparaison, la série à gauche est convergente,

par conséquent la série initiale est convergente

# Test d'équivalence

Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0,$ alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ont la même nature.

Exemple

Étudier la nature de: $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{2^n + (-1)^n}{4^n + n}$

$$\frac{2^n + (-1)^n}{4^n + n} \underset{\infty}{\sim} \frac{2^n}{4^n} \underset{\infty}{\sim} (\frac{1}{2})^n$$

Comme $\sum (\frac{1}{2})^n$ est convergente alors $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{2^n + (-1)^n}{4^n + n}$ est convergente

# Le test intégrale

On suppose que $a_n = f(n)$ avec $f(x)$ est une fonction continue, positive et décroissante,

alors la série $\sum_{n \geq N} a_n$ a la même nature que $\int_N^{+\infty} f(x)dx$.

Exemple

Déterminer la nature de la série: $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

Par le test intégrale, on a:

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{du}{e^u} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-u}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2e^b} + \frac{1}{2e}\right) = \frac{1}{2e}.$$

$u = x^2, du = 2x\, dx$

Comme l'intégrale est convergente alors la série converge aussi.

## Remarque:

La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$ ont la même nature. On en déduit que:

La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$

diverge si $p \leq 1$

## Exemple

On a $$\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+3n+5}{n^3+n+1} \sim \sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{n^3} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

Comme $\sum \frac{1}{n}$ correpond à $p = 1$ alors cette série diverge et par conséquent la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+3n+5}{n^3+n+1}$$ diverge.

## Test d'Alembert:

Soit la série à termes positifs $\sum a_n$. On suppose que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho .$$

Alors: la série converge si $\rho < 1$

la série diverge si $\rho > 1$

pas de conclusion si $\rho = 1$

Exemple nature de la série:

**(a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!n!}, \qquad a_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n!n!(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!(n+1)!(2n)!}$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4n+2}{n+1} \to 4.$$

Comme $\rho = 4 > 1$ alors la série diverge.

**(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n! n!}{(2n)!}$

$a_n = 4^n n! n!/(2n)!,$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{4^n n! n!}$$

$$= \frac{4(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{2n+1} \longrightarrow 1.$$

Ainsi on ne peut rien conclure. Il faut donc chercher un autre moyen pour trancher la question.

On remarque que $a_{n+1} > a_n > \cdots > a_1 = 2$ et parsuite la série diverge.

## Test de Cauchy:

Soit la série à termes positifs $\sum a_n$. On suppose que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho .$$

Alors: la série converge si $\rho < 1$

la série diverge si $\rho > 1$

pas de conclusion si $\rho = 1$

Exemple nature des séries:

$$\textbf{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \qquad \textbf{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3} \qquad \textbf{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$$

**(a)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ converges car $\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2} \to \frac{1^2}{2} < 1.$

**(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$ diverges car $\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} = \frac{2}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3} \to \frac{2}{1^3} > 1.$

**(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$ converges car $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+n}\right)^n} = \frac{1}{1+n} \to 0 < 1.$

# Séries Altérnées

Une suite alternée de la forme $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$

converge si elle vérifie:

1. $u_n \geq 0$
2. $(u_n)$ est décroissante
3. $u_n \to 0$

**Example** Study the nature of $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

Let $u_n = \frac{1}{\ln n}$ we have:

- $u_n > 0$ for all $n \geq 2$

$$\left(\frac{1}{\ln x}\right)' = -\frac{1/x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{x\ln^2 x} < 0 \text{ for } x > 1 \text{ then}$$

- $(u_n)$ is decreasing.
- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Then by Leibniz theorem $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ is convergent.

## Remark

If $p$ is a positive constant, the sequence $\{1/n^p\}$ is a decreasing sequence with limit zero. Therefore

The Riemann alternating series $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^p}$ is convergent if $p > 0$

and divergent if $p \leq 0$

# Absolute Convergence

A series $\sum a_n$ **converges absolutely** (is **absolutely convergent**) if the corresponding series of absolute values, $\sum |a_n|$, converges.

If $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges.

A series that converges but does not converge absolutely is **semi-convergent**

## Example

For $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ which contains both positive and nega-

tive terms, the corresponding series of absolute values is $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right|$

which converges by comparison with $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ because $|\sin n| \leq 1$ for every $n$. The original series converges absolutely; therefore it converges.

## Example

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ is semi-convergent:

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ is a Riemann alternating series with $p = 1/2 > 0$,it converges.

$\sum_{n \geq 1} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ is a Riemann series with $p = 1/2 \leq 1$, it diverges.

# SÉRIES ENTIÈRES

Une série entière autour de $x_0 \in \mathbb{R}$ est une somme de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$. En posant $X = x - x_0$

on peut parler des séries entières autour de $0$, $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ pour déduire des résultats sur les séries

entières autour de $x_0$

## Étude des séries $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ :

Pour chaque valeur de $x$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est une série numérique, on se demande si elle est convergente ou divergente.

L'ensemble des $x$ tel que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est convergente est dit domaine de convergence $D$ de la série.

La limite va dépendre de $x$, ainsi lorsqu'une série entière est convergente, elle représente une fonction de $x$

définie sur $D$.

Exemple 1 : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Posons $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ et appliquons le critère de D'Alembert ;
$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0$. La série entière est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ ;
donc $\Delta = \mathbb{R}$.

Exemple 2 : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

Posons $f_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$ on a : $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 x \right| = |x|$.

Si $|x| < 1$, la série est absolument convergente et si $|x| > 1$ la série diverge.

Etudions le cas où $|x| = 1$.

on a $|f_n(x)| = \frac{|x|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ est alors absolument convergente dans $[-1, 1]$ ; et alors $\Delta = [-1, 1]$

Exemple 3 : $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

Cette série ne converge que si $x = 0$ car $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}|(n+1)x|$ et la limite n'existe que si $x = 0$ : d'où : $\Delta = \{0\}$.

Exemple 4 : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Posons $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ on a $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)x\right| = |x|$. Si $|x| < 1$, la série est absolument convergente et si $|x| > 1$ la série diverge.

Etudions le cas où $|x| = 1$.

$x = 1$ : c'est la série harmonique $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$, elle est divergente.

$x = -1$ : c'est la série harmonique alternée $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n}\right)$, elle est convergente.

D'où : $\Delta = [-1, 1[$.

# Rayon de convergence d'une série entière

**Théorème :**

*Soit $\left(\sum a_n x^n\right)$ une série entière ; alors il existe un unique nombre réel $R \geq 0$ (éventuellement infini) tel que :*

1. *$\left(\sum a_n x^n\right)$ converge absolument dans $]-R, R[$.*
2. *$\left(\sum a_n x^n\right)$ diverge si $|x| > R$.*

**Remarque :** Le rayon de convergence d'une série $\left(\sum a_n x^n\right)$ est caractérisé par :

1. $|x| < R \Longrightarrow \left(\sum a_n x^n\right)$ est absolument convergente.
2. $|x| > R \Longrightarrow \left(\sum a_n x^n\right)$ diverge.
3. $|x| = R$ est le cas douteux où on ne peut rien dire sur la nature de la série.
4. Pour tout $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $r < R$, la série $\left(\sum a_n x^n\right)$ est normalement (donc absolument) convergente pour $|x| \leq r$.

**Lemme 1 (Lemme d'Hadamard)**

*Soit $\left(\sum a_n x^n\right)$ une série entière. Le rayon de convergence $R$ est donné par la relation :*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

**Exemple**

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

On a $a_n = \frac{1}{n!}$, utilisons le critère de D'Alembert :

$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{1}{n+1}\right| = 0$, donc le rayon de convergence est $R = \infty$.

La série est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

On a $\lim_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{n}{n+1}\right|^2 = 1$. Le rayon de convergence est $R = 1$. La série est absolument convergente pour tout $|x| < 1$ et divergente si $|x| > 1$.

# Série dérivée et Série primitive:

**Proposition**

*Soit $\left(\sum a_n x^n\right)$ une série entière de rayon de convergence $R$, et soit $f : ]-R, R[ \longmapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Alors $f$ est dérivable et on a $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.*

**Corollaire**

*Soit la série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R$ ; $f$ est indéfiniment dérivable ($f \in C^{\infty}(]-R, R[)$) ; et l'on a :*

$$\forall x \in ]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

**Remarque** Dans le cas réel, si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, avec $a_n \in \mathbb{R}$ et $x \in ]-R, R[$, $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$ pour tout $x \in ]-R, R[$.

# Séries de Taylor

**Problème**

Soit $f$ une fonction réelle à variable réelle $x$. Peut-on trouver une suite réelle $(a_n)_n$ et $r > 0$ tels que l'on ait $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour $x \in ]-r, r[$ ?

Si ce problème admet une solution, on dit que $f$ est développable en série entière au voisinage de 0.

**Proposition**

*Soit $f : ]-r, r[ \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $C^\infty$ dans un voisinage de 0. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in ]-r, r[$, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est simplement convergente dans $]-r, r[$ et on a $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \; \forall x \in ]-r, r[$*

# Table of commun Taylor series for x_0=0

| Function | Series | Initial Terms | Converges for |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{1-x}$ | $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ | $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$ | $-1 < x < 1$ |
| $e^x$ | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ | $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ | All $x$ |
| $\sin(x)$ | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ | $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ | All $x$ |
| $\cos(x)$ | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ | $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ | All $x$ |
| $\tan^{-1}(x)$ | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ | $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$ | $-1 \leq x \leq 1$ |
| $\ln(1+x)$ | $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ | $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$ | $-1 < x \leq 1$ |
| $(1+x)^k$ | $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$ | $1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} x^3 + \cdots$ | $-1 < x < 1$ |

## Exemple

Donner le développement en série entière de $\frac{x}{1+x^2}$ autour de $0$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \qquad |x| < 1$$

En remplaçant $x$ par $-x^2$ :

$$\frac{x}{1+x^2} = x\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1} = x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots.$$

sachant que $|x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$